JURNAL APTEK

Artikel Ilmiah Aplikasi Teknologi
homepage: http://journal.upp.ac.id/index.php/aptek

p-ISSN 2085-2630
e-ISSN 2655-9897

Studi Literatur: Mekanika Lagrange

Raniati[a,]*, Yulinda Ariyanti[a], Purwo Subekti[b], Hamid Syahropi[a]

[a]Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pasir Pengaraian, Rokan Hulu, Riau
[b]Program Studi Teknik Mesin, Universitas Pasir Pengaraian, Kab. Rokan Hulu, Riau

INFOARTIKEL

Tersedia Online: Desember 2022

ABSTRAK

Metode Lagrange merupakan suatu metode yang terdiri dari Energi Kinetik dan Energi Potensial. Dalam perumusannya koordinat yang digunakan adalah posisi dan kecepatan. Dalam mekanika Lagrange, alur benda didapat dengan mencari jalur yang meminimkan aksi, sebuah kuantitas yang merupakan integral dari Lagrangean sejalan dengan waktu. Lagrangean untuk mekanika klasik dibedakan dengan energi kinetik dan energi potensial. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif. Adapun pendekatan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dari hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan Mekanika Lagrange. Melalui penelitian dengan metode studi pustaka yang terkait, diharapkan artikel ini dapat dikembangkan dan menjadi rujukan bagi penulis berikutnya. MekanikaLagrange merupakan suatu metode penyelesaian persoalan mekanika yang tidak mudah diselesaikan dengan Mekanika Newton. Posisi partikel di dalam satu ruang dapat ditentukan melalui 3 koordinat. Koordinat tersebut dapat berupa koordinat kartesan, koordinat bola atau koordinat silinder.

Kata kunci: mekanika lagrange; penelitian; metode

E – MAIL

raniatilubis@gmail.com
yulindaariyanti70@gmail.com
purwos@upp.ac.id

ABSTRACT

The Lagrange method is a method consisting of kinetic energy and potential energy. In the formulation of the coordinates used are position and velocity. In Lagrange mechanics, the path of objects is found by finding the path that minimizes action, a quantity that is the Lagrangean integral over time. The Lagrangean for classical mechanics is distinguished by kinetic energy and potential energy. This research is a descriptive research. The approach used in this research is a literature study from the results of previous research related to Lagrange Mechanics. Through research using related literature study methods, it is hoped that this article can be developed and become a reference for future writers. Lagrange mechanics is a method of solving mechanics problems that are not easily solved with Newtonian mechanics. The position of the particle in one space can be determined through 3 coordinates. These coordinates can be cartesan coordinates, spherical coordinates or cylindrical coordinates.

***Kata kunci**: lagrange mechanics; research; methods*

I. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari banyak kejadian fisis di sekitar kita dimana setiap analisis gerakannya selama ini hanya di dasarkan dengan metode Newton atau biasa disebut Newtonian. Seiring dengan berjalannya waktu metode-metode analisis gerak yang lain mulai bermunculan seperti metode Lagrange dan metode Hamiltonian. Walau pada kedua metode tersebut juga merupakan pengembangan dari hukum Newton [1].

Metode Lagrange merupakan suatu metode yang terdiri dari Energi Kinetik dan Energi Potensial. Dalam perumusannya koordinat yang digunakan adalah posisi dan kecepatan. Mekanika Lagrangean adalah pengembangan formulasi mekanika klasik diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange pada 1788. Dalam mekanika Lagrangean, alur benda didapat dengan mencari jalur yang meminimkan aksi, sebuah kuantitas yang merupakan integral dari Lagrangean sejalan dengan waktu. Lagrangean untuk mekanika klasik dibedakan dengan energi kinetik dan energi potensial [2]].

II. MATERIAL DAN METODE

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif. Adapun pendekatan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dari hasil penelitian terdahulu yang berkaitan dengan Mekanika Lagrange. Melalui penelitian dengan metode studi pustaka yang terkait, diharapkan artikel ini dapat dikembangkan dan menjadi rujukan bagi penulis berikutnya.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

MEKANIKA LAGRANGE

Mekanika Lagrange merupakan suatu metode penyelesaian persoalan mekanika yang tidak mudah diselesaikan dengan Mekanika Newton. Posisi partikel di dalam satu ruang dapat ditentukan melalui 3 koordinat. Koordinat tersebut dapat berupa koordinat kartesan, koordinat bola atau koordinat silinder. Jika benda bergerak dalam bidang, maka derajat kebebasannya ada 2, jika benda bergerak dalam ruang 3D, maka derajat kebebasannya ada 3. Untuk kasus N partikel, maka kita membutuhkan 3N koordinat untuk menentukan posisi dari seluruh partikel tersebut. Jika terdapat kendala dalam sistem, maka jumlah koordinatnya < 3N. Misalnya untuk benda tegar, maka yang dibutuhkan adalah posisi pusat massa dan orientasi bendanya. Jadi hanya 6 koordinat saja [3].

Misalnya koordinat diberi simbol q1, q2,⋯, qn sebagai koordinat umum. Koordinat qk bisa berupa jarak atau sudut. Jika untuk menentukan sebuah sistem, sebuah koordinat dapat bebas maka sistem tersebut disebut sistem holonomik dan sebaliknya disebut nonholonomik. Jika sistem berupa partikel, maka koordinat kasrtesan dapat dinyatakan dalam koordinat [3][4].

x = x(q) → 1 derajat kebebasan – gerak pada sebuah kurva

$$\left.\begin{array}{l} x=x\,(q1, q2) \\ y=y\,(q1, q2) \end{array}\right\} \text{2 derajat kebebasan – gerak pada sebuah permukaan}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x\,(q1, q2, q3) \\ y=y\,(q1, q2, q3) \\ z=z\,(q1, q2, q3) \end{array}\right\} \text{3 derajat kebebasan – gerak pada ruang}$$

Jika q berubah dari nilai awal (q1, q2,...) ke nilai tetangga (q1+ δ q1, q2 +δ q2,....) maka perubahan tersebut kaitannya dengan koordinat kartesan

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\, dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\, \partial d_2 + \cdots$$

Persamaan Lagrange

Untuk memperoleh persamaan differensial tentang gerak, maka kita mula dengan ungkapan [3].

$$F_i = m\ddot{x}_i \qquad (1)$$

Energi kinetik yang dimiliki oleh N partikel adalah

$$T = \sum_i^N \frac{1}{2}\, m\,(\dot{x}_i + \dot{y}_i + \dot{z}_i) \qquad (2)$$

$$= \sum_i^{3N} \frac{1}{2}\, m\dot{x}_i \qquad (3)$$

Dimana xi merupakan fungsi koordinat umum xi=xi (q1, q2, q3,..., qn ,t), sehingga

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\, q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (4)$$

Ingat bahwa i= 1,..., 3N → menyatakan jumlah partikel
k = 1,..., n → menyatakan jumlah derajat kebebasan

Apabila xi bukan fungsi t, maka diperoleh ungkapan

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (5)$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan x˙i kemudian diturunkan terhadap t, maka diperoleh [5]:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)$$

$$= \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{x_i^2}{2}\right)}{\partial q_k}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial\left(\frac{x_i^2}{2}\right)}{\partial q_k} \qquad (7)$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan m, maka:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{x_i^2}{2}\right)}{\partial q_k}\right) = \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial\left(\frac{\dot{x}_i}{2}\right)}{\partial q_k} \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (9)$$

dengan menjumlah ke seluruh I

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (10)$$

maka

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \qquad (11)$$

Persamaan inilah yang disebut persamaan Lagrange [4]. Untuk gerak konservatif dimana:

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (12)$$

maka ungkapan persamaan lagrange dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (13)$$

Jika diberikan fungsi Lagrange [5][6][7][8]

$$L = T - V \qquad (14)$$

dimana T dan V dinyatakan dalam koordinat umum

$$V \equiv V(q_k) \rightarrow \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad (15)$$

maka

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} \; dan \; \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (16)$$

sehingga persamaan Lagrange untuk sistem yang konservatif adalah:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (17)$$

Jadi, persamaan diferensial gerak untuk sistem konservatif dapat diperoleh jika fungsi Lagrange dalam set koordinat diketahui. Jika gaya umumnya tidak konservatif, missal Q'k (misal ada gaya gesek) dan sebagian dapat diturunkan → fungsi potensial V yaitu [5].

$$Q_k = Q'_k - \frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (18)$$

maka dari L=T −V diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = Q'_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (19)$$

Aplikasi persamaan Lagrange

Untuk mengaplikasikan persamaan Lagrange maka langkah-langkahnya adalah [3]:

1. Pilih koordinat yang sesuai untuk menggambarkan konfigurasi dari sistem tersebut.
2. Tentukan T sebagai fungsi koordinat dan turunan waktu.
3. Jika system konservatif maka carilah V sebagai fungsi koordinat, Jika sistem nonkonservatif maka carilah gaya umumnya → Qk.
4. Persamaan diferensial gerak diberikan oleh

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (20)$$

atau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) = Q'_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (21)$$

Penggunaan persamaan mekanika lagrange pada osilator harmonik. Ditinjau sebuah osilator harmonik dimana terdapat gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan. Jadi sistem adalah nonkonservatif. Jika x adalah pergeseran [3], maka fungsi Lagrange yang digunakan adalah:

$$L = T - V = \frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad (22)$$

Dimana m adalah massa benda dan K adalah parameter stiffness, dengan mengaplikasikan pers. Lagrange, dimana:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) = m\dot{x} \;\; dan \;\; \frac{\partial L}{\partial x} = -Kx \qquad (23)$$

Dengan kehadiran gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan yaitu $-c\dot{x}$ persamaan geraknya menjadi

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -c\dot{x} - Kx \qquad (24)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \qquad (25)$$

Aplikasi persamaan lagrange pada partikel tunggal di dalam medan central. Marilah kita mencari persamaan gerak Lagrange untuk partikel yang bergerak di dalam bidang bawah medan central [3]. Pada bagian ini kita memilih koordinat polar $q_1=r$ dan $q_2=\theta$, maka:

$$r=r\ e, \quad (26)$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(r^2+r^2\theta^2\right) \quad (27)$$

$$V=V(r) \quad (28)$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(r^2+r^2\theta^2)-V(r) \quad (29)$$

Kemudian:

$$\frac{\partial L}{\partial r}=m\ r, \quad \frac{\partial L}{\partial r}=m\ r\theta^2\text{-}f(r) \quad (30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=mr^2\theta, \ \frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \quad (31)$$

Karena sistemnya adalah konservatif, maka persamaan geraknya adalah

$$\frac{d}{dt}(mr)=mr\theta^2-f(r) \ \rightarrow mr-mr\theta^2+f(r)=0 \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\theta)=0 \ \rightarrow \ mr^2\theta=constan \quad (33)$$

IV. KESIMPULAN

Mekanika Lagrange merupakan suatu metode penyelesaian persoalan mekanika yang tidak mudah diselesaikan dengan Mekanika Newton. Posisi partikel di dalam satu ruang dapat ditentukan melalui 3 koordinat. Koordinat tersebut dapat berupa koordinat kartesan, koordinat bola atau koordinat silinder. Jika benda bergerak dalam bidang, maka derajat kebebasannya ada 2, jika benda bergerak dalam ruang 3D, maka derajat kebebasannya ada 3.

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih juga kami ucapkan kepada rekan yang sudah membantu dalam menemani untuk menyelesaikan artikel ini.

DAFTAR PUATAKA

[1]. S. Hanifah, Mekanika Lagrangian [Online] // academia.edu. –senin-Desember-2022. - https://www.academia.edu/9877665/Mekanika_Lagrangian.

[2]. Asik Physics, Asik Physics [Online] // http://asikphysics.blogspot.com/. - 16 Januari 2011. - 25 November 2022. - http://asikphysics.blogspot.com/2011/01/sejarah-fisika-dalam-mekanika.html?m=1 .

[3]. R. Supriadi, Mekanika lagrange [Online] // slideshare.net. - 26 April 2015. - 25 November 2022. - https://www.slideshare.net/12Riyan343/mekanika-lagrange-47423822.

[4]. G. R. Fowles, Analitical Mechanics [Buku]. - America : United States of America, 2007.

[5]. C. E. Ndikilar, Analytical Mechanics [Buku]. - Nigeria. : Ahmadu Bello University Press Limited, Zaria, 2019.

[6]. M. David, Introductory Classical Mechanics with Problems and Solutions [Buku]. - Inggris : Cambrigde University Press, 2003.

[7]. T. Jeremy, Classical Mechanics [Buku]. - [s.l.] : University of Victoria, 2022.

[8]. M. David, Introduction to Classical Mechanics With Problems and Solutions [Buku]. - New York: United States of America by Cambridge University Press, 2008.